

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2024, Convocatoria ordinaria

mentoor.es



Sèrie 1

Ejercicio 1. Análisis

Considere la función $f(x) = 2\frac{\ln x}{x}$, definida para $x > 0$.

- Estudie sus máximos y mínimos, y las zonas de crecimiento y de decrecimiento.
- ¿Esta función tiene asíntotas? Haga un esbozo de su gráfica.
- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- Estudie sus máximos y mínimos, y las zonas de crecimiento y de decrecimiento.

Para estudiar la monotonía y los extremos, calculamos la primera derivada de la función:

$$f'(x) = 2 \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Igualemos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos:

$$2(1 - \ln(x)) = 0 \implies 1 - \ln(x) = 0 \implies \ln(x) = 1 \implies x = e.$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos definidos por el punto crítico y el dominio.

Intervalo	$(0, e)$	$(e, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-
Comportamiento de $f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘

La función es creciente en $(0, e)$ y decreciente en (e, ∞) . En $x = e$, la función pasa de crecer a decrecer, por lo que hay un **máximo relativo (y absoluto)**. Las coordenadas del máximo son $(e, f(e)) = (e, 2\frac{\ln e}{e}) = (e, 2/e)$.

**Creciente en $(0, e)$ y decreciente en (e, ∞) .
Máximo relativo en el punto $(e, 2/e)$. No tiene mínimos.**

- ¿Esta función tiene asíntotas? Haga un esbozo de su gráfica.

Asíntotas Verticales: Estudiamos el límite en el extremo del dominio, $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\ln x}{x} = 2 \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

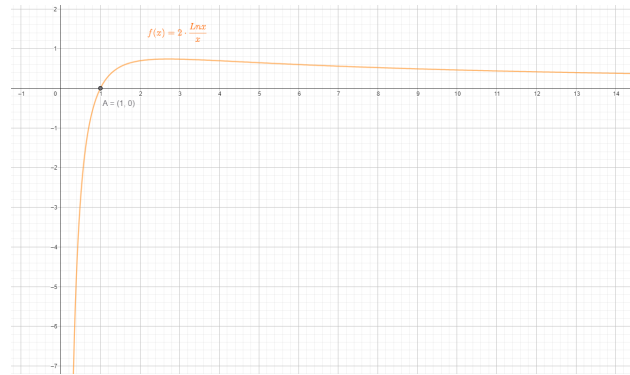
Hay una **asíntota vertical en $x = 0$** .

Asíntotas Horizontales: Estudiamos el límite cuando $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{1/x}{1} = 0.$$

Hay una **asíntota horizontal en $y = 0$** .

Esbozo de la gráfica:



A.V. en $x = 0$. A.H. en $y = 0$.

- c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

La ecuación es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

– $f(1) = 2 \frac{\ln 1}{1} = 0$. El punto de tangencia es $(1, 0)$.

– $f'(1) = 2 \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 2$. La pendiente es $m = 2$.

La ecuación es: $y - 0 = 2(x - 1) \implies y = 2x - 2$.

La ecuación de la recta tangente es $y = 2x - 2$.

Ejercicio 2. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$

donde k es un parámetro real.

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k , y resuélvalo para $k = 0$.
- Resuelva el sistema para $k = -1$.
- Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema se convierta en incompatible. Justifique la respuesta.

Solución:

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k , y resuélvalo para $k = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = 4(-3k) - 2(-3k) - 1(3+3) = -12k + 6k - 6 = -6k - 6.$$

$$|A| = 0 \implies -6k - 6 = 0 \implies k = -1.$$

Caso 1: $k \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. **S.C.D.**

Caso 2: $k = -1 \implies |A| = 0$. $\text{Rg}(A) = 2$.

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$F_1 - F_2 = (3, 3, 0|1)$, que es la F3. Son linealmente dependientes. $\text{Rg}(A^*) = 2$.

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

Resolución para $k=0$ (S.C.D.):

$$|A| = -6.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-1(9+1)}{-6} = \frac{-10}{-6} = 5/3.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-1(1-9)}{-6} = \frac{8}{-6} = -4/3.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-58}{-6} = 29/3.$$

S.C.D si $k \neq -1$, S.C.I si $k = -1$. Solución para $k=0$: $(5/3, -4/3, 29/3)$.

- Resuelva el sistema para $k = -1$.



Es S.C.I. Usamos las dos primeras ecuaciones: $\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$.

Hacemos $y = \lambda$.

$$z = 4x + 2\lambda - 4.$$

$$x - \lambda - (4x + 2\lambda - 4) = 3 \implies -3x - 3\lambda + 4 = 3 \implies -3x = 3\lambda - 1 \implies x = -\lambda + 1/3.$$

$$z = 4(-\lambda + 1/3) + 2\lambda - 4 = -4\lambda + 4/3 + 2\lambda - 4 = -2\lambda - 8/3.$$

La solución es $(x, y, z) = (1/3 - \lambda, \lambda, -8/3 - 2\lambda)$.

c) Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema se convierta en incompatible. Justifique la respuesta.

Para $k = -1$, el sistema es S.C.I. y la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras. Para que sea incompatible, debemos crear una contradicción. La forma más sencilla es mantener el lado izquierdo de la tercera ecuación y cambiar el término independiente a cualquier otro valor.

Por ejemplo, la nueva tercera ecuación puede ser $3x + 3y = 0$.

El sistema $\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$ es incompatible porque $F_1 - F_2 = (3, 3, 0|1)$, lo cual implica que $3x + 3y =$

1, en contradicción con la nueva tercera ecuación $3x + 3y = 0$.

Nueva ecuación: $3x + 3y = 0$

Ejercicio 3. Análisis

Joan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre. La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

- A partir de la expresión de $f(x)$ calcule las coordenadas de los puntos P, Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR.
- Calcule la superficie del terreno.

Solución:

- A partir de la expresión de $f(x)$ calcule las coordenadas de los puntos P, Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR.

Los puntos P y Q están en la recta horizontal $y = 5$. Para encontrarlos, resolvemos $f(x) = 5$:
 $-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \implies -x^3 + 7x^2 - 6x = 0 \implies -x(x^2 - 7x + 6) = 0 \implies -x(x-1)(x-6) = 0$.

Las soluciones son $x = 0, x = 1, x = 6$.

Por la figura, $P = (1, 5)$ y $Q = (6, 5)$.

El punto R está en el eje OX ($y = 0$) con la misma abscisa que Q, por lo que $R = (6, 0)$.

La recta PR pasa por $P(1, 5)$ y $R(6, 0)$. La pendiente es $m = \frac{0-5}{6-1} = -1$.

Ecuación punto-pendiente: $y - 0 = -1(x - 6) \implies y = -x + 6$.

P=(1,5), Q=(6,5), R=(6,0). Recta PR: $y = -x + 6$.
--

- Calcule la superficie del terreno.

La superficie (área sombreada) es el área bajo la curva $f(x)$ entre $x = 1$ y $x = 6$, menos el área del triángulo de vértices P, R y (1,0).

$$\text{Área bajo la curva: } A_{\text{curva}} = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 6x + 5)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_1^6 = \frac{1075}{12}.$$

El área del triángulo con vértices (1, 5), (6, 0) y (1, 0) es la de un trapecio menos otro triángulo, pero es más fácil: el área bajo la recta $y = -x + 6$ entre $x = 1$ y $x = 6$.

$$A_{\text{recta}} = \int_1^6 (-x + 6)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 6x\right]_1^6 = (-18 + 36) - (-1/2 + 6) = 18 - 11/2 = 25/2.$$

$$\text{La superficie del terreno es } A_{\text{curva}} - A_{\text{recta}} = \frac{1075}{12} - \frac{25}{2} = \frac{1075-150}{12} = \frac{925}{12}.$$

La superficie del terreno es de $\frac{925}{12}$ unidades de área.
--



Ejercicio 4. Probabilidad

Andreu pone las nueve bolas que se muestran a continuación dentro de una bolsa. BAVESFANS

- A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una detrás de la otra y sin reemplazamiento (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda). Calcule la probabilidad de que la primera bola sea una A o una E. Calcule la probabilidad de que las dos bolas sean diferentes.
- Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de la otra, pero ahora con reemplazamiento (es decir, ahora sí que devuelve a la bolsa cada bola extraída antes de coger la siguiente). Calcule la probabilidad de que no haya sacado ninguna A. Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A.

Solución: Composición de la bolsa: 9 bolas en total. A: 2, S: 2, B: 1, V: 1, E: 1, F: 1, N: 1.

- A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una detrás de la otra y sin reemplazamiento (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda). Calcule la probabilidad de que la primera bola sea una A o una E. Calcule la probabilidad de que las dos bolas sean diferentes.

$$P(1^{\text{a}} \text{ A o E}) = P(1^{\text{a}} \text{ A}) + P(1^{\text{a}} \text{ E}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$P(\text{dos diferentes}) = 1 - P(\text{dos iguales}).$$

Las únicas letras repetidas son A y S.

$$P(\text{dos iguales}) = P(A_1 \cap A_2) + P(S_1 \cap S_2) = \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{2}{72} + \frac{2}{72} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}.$$

$$P(\text{dos diferentes}) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}.$$

$$P(1^{\text{a}} \text{ A o E}) = 1/3. \quad P(\text{dos diferentes}) = 17/18.$$

- Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de la otra, pero ahora con reemplazamiento (es decir, ahora sí que devuelve a la bolsa cada bola extraída antes de coger la siguiente). Calcule la probabilidad de que no haya sacado ninguna A. Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A.

Es un experimento binomial con $n = 5$ extracciones. El éxito es "sacar A", con probabilidad $p = 2/9$. El fracaso es "no sacar A", con $q = 7/9$. Sea X el número de A sacadas. $X \sim B(5, 2/9)$.

$$P(\text{ninguna A}) = P(X = 0) = \binom{5}{0} p^0 q^5 = (7/9)^5 = \frac{16807}{59049} \approx 0.2846.$$

$$P(\text{al menos dos A}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)). \quad P(X = 1) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5 \cdot (2/9) \cdot (7/9)^4 = 10/9 \cdot (2401/6561) = \frac{24010}{59049} \approx 0.4066. \quad P(X \geq 2) = 1 - (0.2846 + 0.4066) = 1 - 0.6912 = 0.3088.$$

$$P(X = 0) \approx 0.2846. \quad P(X \geq 2) \approx 0.3088.$$



Ejercicio 5. Análisis

Queremos construir un pequeño cobertizo de madera de $6m^3$ de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo es necesario construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, queremos que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 y el techo cuesta 50 por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadir una puerta tiene un coste fijo de 35.

- a) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$$

donde x es la profundidad del cobertizo en metros.

- b) Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste?

Solución:

- a) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$$

donde x es la profundidad del cobertizo en metros.

Sean x la profundidad, w la anchura y h la altura.

$$w = 3x. \text{ Volumen } V = wxh = (3x)xh = 3x^2h = 6 \implies h = 2/x^2.$$

Superficies a construir:

- Techo: $w \times x = 3x \cdot x = 3x^2$.

- Pared frontal: $w \times h = 3x \cdot h$.

- 2 Paredes laterales: $x \times h$ cada una. Área total de paredes: $3xh + 2(xh) = 5xh$.

$$\text{Coste} = (\text{Coste Techo}) + (\text{Coste Paredes}) + (\text{Coste Puerta})$$

$$C(x) = (50 \cdot 3x^2) + (30 \cdot 5xh) + 35 = 150x^2 + 150xh + 35.$$

$$\text{Sustituimos } h = 2/x^2:$$

$$C(x) = 150x^2 + 150x(2/x^2) + 35 = 150x^2 + 300/x + 35. \text{ Queda comprobado.}$$

La expresión del coste queda comprobada.

- b) Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste?

Derivamos la función de coste $C(x)$ e igualamos a cero:

$$C'(x) = 300x - 300/x^2.$$

$$300x - 300/x^2 = 0 \implies 300x = 300/x^2 \implies x^3 = 1 \implies x = 1.$$

La segunda derivada $C''(x) = 300 + 600/x^3$ es positiva, por lo que es un mínimo.

Dimensiones:

- Profundidad: $x = 1$ m.

- Anchura: $w = 3x = 3$ m.

- Altura: $h = 2/x^2 = 2$ m.

Coste mínimo: $C(1) = 150(1)^2 + 300/1 + 35 = 150 + 300 + 35 = 485$.

Dimensiones: 1m de profundidad, 3m de anchura y 2m de altura. Coste mínimo: 485 .
--

Ejercicio 6. Geometría

Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (-3, -2, 3)$.

- Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B . Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$.
- Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta.
- Sea $C = (-7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área.

Solución:

- Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B . Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$.

El vector $\vec{AB} = B - A = (-4, -4, 0)$ es el vector normal del plano. Podemos usar $\vec{n} = (1, 1, 0)$.

El punto medio es $M = (\frac{1-3}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{3+3}{2}) = (-1, 0, 3)$.

Ecuación del plano: $1(x - (-1)) + 1(y - 0) + 0(z - 3) = 0 \implies x + 1 + y = 0 \implies x + y + 1 = 0$.

Justificación: Un punto $P(x, y, z)$ equidista de A y B si $d(P, A) = d(P, B) \implies d(P, A)^2 = d(P, B)^2$.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = (x + 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2.$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + 4 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4.$$

$$-2x - 4y + 5 = 6x + 4y + 13 \implies 8x + 8y + 8 = 0 \implies x + y + 1 = 0. \text{ Es la ecuación del plano.}$$

Plano: $x + y + 1 = 0$. Queda justificado que es el plano mediatriz.

- Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta.

$$d(A, \pi) = \frac{|1 + 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$d(B, \pi) = \frac{|-3 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Son iguales. No es casualidad, ya que por definición, todos los puntos del plano mediatriz equidistan de los extremos A y B . Como el plano pasa por el punto medio M , la distancia de A y B al plano debe ser la misma.

Ambas distancias son $2\sqrt{2}$. No es casualidad, es la propiedad del plano mediatriz.

- Sea $C = (-7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área.

Calculamos las longitudes de los lados:

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$d(A, C) = |\vec{AC}| = \sqrt{(-7-1)^2 + (6-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$d(B, C) = |\vec{BC}| = \sqrt{(-7+3)^2 + (6+2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Como $d(A, C) = d(B, C)$, el triángulo es **isósceles**.

Área:

$$A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(-4, -4, 0) \times (-8, 4, 0)|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -4 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(-16 - 32) = (0, 0, -48).$$

Área:

$$A = \frac{1}{2} |(0, 0, -48)| = \frac{1}{2} (48) = 24$$

Sí, es isósceles. El área es de 24 u².